

Aufgaben zur Ebenenumwandlung

Aufgabe 1: Wandle in die Normalenform um: E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2: Wandle in die Parameterform um: E: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

Aufgabe 3: Wandle in die Koordinatenform um: E: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 29 \\ -23 \end{pmatrix} = 0$

Aufgabe 4: Wandle in die Normalenform um: E: $2x + 3y - z = 6$

Aufgabe 5: Wandle in die Koordinatengleichung um. E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6: Wandle in die Parametergleichung um. $2x + y - z = 3$

Beispiel 1: Von der Parameterform in die Normalenform

Parameterform: E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Normalenform: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix} = 0$

Stützvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0 \text{ und } \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{I} \quad 2n_1 - 1n_2 + 2n_3 = 0$$

$$\text{II} \quad -2n_1 + 2n_2 + 1n_3 = 0$$

$$\text{I} + \text{II}$$

$$\text{III} \quad 1n_2 + 3n_3 = 0$$

$$1n_2 = -3n_3$$

Unterbestimmtes Gleichungssystem:

$$\text{Für } n_3 = -1 \rightarrow n_2 = -3(-1) = 3$$

n_2, n_3 in I

$$\text{I} \quad 2n_1 - 1(3) + 2(-1) = 0$$

$$2n_1 - 3 - 2 = 0$$

$$2n_1 = 5$$

$$n_1 = 2.5$$

Der Vektor, der zu beiden orthogonal ist, lautet: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Diesen Vektor in die Normalenform eingesetzt, ergibt: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

Alternativ kann man den Normalenvektor auch mit dem Vektorprodukt, bzw. Kreuzprodukt ausrechnen:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 \\ -(2 \cdot 1 - 2 \cdot (-2)) \\ 2 \cdot 2 - (-1) \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 2: Von Normalform in Parameterform

$$\left[\bar{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{E: } \bar{x} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$\text{E: } \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

1. Zwei orthogonale Vektoren suchen $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 1x + 2y + 1z = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ orthogonal. Ebenso der Vektor } \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2. Prüfen, ob die Gleichung lösbar ist: $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$

$$\text{E: } \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 3: Von der Normalenform in die Koordinatenform

$$\left[\bar{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 29 \\ -23 \end{pmatrix} = 0 \qquad _13_ x + _29_ y - 23_ z = _ -67 _$$

Diese Form erhält man durch Ausmultiplizieren:

$$\left[\bar{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 29 \\ -23 \end{pmatrix} = 0 \qquad \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 29 \\ -23 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 29 \\ -23 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$[13x + 29y - 23z - (13 + 2 \cdot 29 + 6 \cdot (-23))] = 0$$

$$13x + 29y - 23z + 67 = 0$$

$$13x + 29y - 23z = -67$$

Übung 4: Von der Koordinatenform in die Normalenform

Wandle in die Normalenform um: $E = 2x + 3y - z = 6$

$$2x + 3y - z = 6$$

$$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} = 0$$

Den Normal ablesen: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Also $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

Sei $z = 0$ und $y = -2$:

$$2x + 3 \cdot (-2) = 6 \quad \Rightarrow \quad 2x = 12 \quad \Rightarrow \quad x = 6$$

Daraus $x = 6$

Stützvektor: $\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Normalenform: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

Beispiel 5 Von der Parameterform in die Koordinatenform

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

I $x = 2 + r + 5s$

II $y = 2 + r - s$ Nun nach r auflösen.

III $z = 0 - r - s$

IV : I und II

$$x = 2 + r + 5s$$

$$y = 2 + r - s \rightarrow r = -y - 2 + s$$

$$\text{IV: II in I } x = 2 - y + 6s$$

V : II und III

$$\text{II } y = 2 + r - s$$

$$\text{III } z = 0 - r - s \rightarrow r = -z - s$$

$$\text{V: III in II: } y = 2 - z - 2s$$

$$\text{IV } x = 2 - y + 6s$$

$$\text{V } y = 2 - z - 2s \mid \cdot 3 \rightarrow 3y = 6 - 3z - 6s \rightarrow 6s = -3y + 6 - 3z$$

$$\text{Einsetzen: } x = (-3y + 6 - 3z) - y$$

$$X = 2y - 6 + 3z \mid + 6; -x$$

$$-x + 2y + 3z = 6$$

Beispiel 6: Von der Koordinatenform in die Parameterform

$$\text{Koordinatenform } 2x + y - z = 3$$

Setze:

$$x = r \quad \text{umgeschrieben I} \quad 0 + r \cdot 1 + s \cdot 0$$

$$y = s \quad \text{umgeschrieben II} \quad 0 + r \cdot 0 + s \cdot 1$$

nach z auflösen:

$$\text{III. } 2x + y - z = 3 \quad | +z \quad -3$$

$$2x + y - 3 = z$$

Die drei Gleichungen in Matrix eintragen:

$$\text{E: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & +r \cdot 1 & +s \cdot 0 \\ 0 & +r \cdot 0 & +s \cdot 1 \\ -3 & +r \cdot 2 & +s \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{E: } x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$